数理解析研究所講究録
271巻 1976年 34-44

連結と余連結なCWスペクトラム

阪市大 理　吉村善一

CWスペクトラムと射のホモトピー類からなる圏を $\mathcal{C}_R$ とし、この圏の中で話を進める。

1節　Postnikov 分解

1.1. CWスペクトラム E に対し、$n+1$ 余連結なCWスペクトラム F と射 $f: E \to F$ が与えられ、$f_*: \pi_i(E) \cong \pi_i(F)$ $(i \leq n)$ が満たされるとき、対 (F, f) を E の $n+1$ 余連結 Postnikov コファイバーとよび、$((E(-\infty, n], j_n)$ で表わす。又、n 連結なCWスペクトラム G と射 $g: G \to E$ が与えられ、$g_*: \pi_i(G) \cong \pi_i(E)$ $(i > n)$ が満たされるとき、対 (G, g) を E の n 連結 Postnikov ファイバーとよび、$((E(n, \infty), i_n)$ で表わす。　E に $n+2$ 次元以上の胞体を接着して $n+1$ 次元以上のホモトピー群を消したCWスペクトラムを $E_{n,\infty}$ とし、その包含を $l_n: E \subset E_{n,\infty}$ と

すると,

(1.1) 対 $(E_{n,\infty}, \iota_n)$ は E の $n+1$ 余連結 Postnikov コファイバーになる。

一方, ι_n を含むコファイバー列 $E'_{n,\infty} \xrightarrow{\kappa_n} E \subset E_{n,\infty}$ を考えると,

(1.2) 対 $(E'_{n,\infty}, \kappa_n)$ は E の n 連結 Postnikov ファイバーになる。

しかも $(E_{n,\infty}/E)^{n+1} = \{*\}$ となるから

<u>命題 1.1</u> CW スペクトラム E が n 連結ならば, E とホモトピー同値でその n 切片が基点からなる CW スペクトラム G が存在する。

<u>補題 1.2</u> i) X は n 連結で E は $n+1$ 余連結, 又は ii) X は高々 n 次元で E は n 連結とする。 そのとき $\{X, E\} = \{0\}$ となる。

[証明] i) 命題 1.1 より $X^n = \{*\}$ と仮定してよいので, k についての帰納法により $\{X^{n+k}, E\} = 0$ $(k \geqq 0)$ を得る。そこで Milnor の完全列

$$0 \to \varprojlim{}^1 \{X^{n+k}, \Sigma^{-1} E\} \to \{X, E\} \to \varprojlim \{X^{n+k}, E\} \to 0$$

を用いると, $\{X, E\} = \{0\}$ となる。

ii) X は $X_0 = \{*\}$, $X_{k+1}/X_k = \bigvee_\alpha \Sigma^{d_m}$ $(d_m \leq n)$, $X = \cup X_k$ なる位数フィルトレーション $\{X_k\}$ をもつ。 従って Milnor の

完全列をそれに適用すると、$\{X, E\} = \{0\}$ を得る。□

<u>定理1.3</u> (Araki[1], Dold[3])

"Postnikov ファイバー、コファイバーの普遍性"

i) $n+1$ 余連結な CW スペクトラム F と射 $f: E \to F$ に対し $f = f_n \cdot j_n$ なる唯一つの射 $f_n: E(-\infty, n] \to F$ が存在する。

ii) n 連結な CW スペクトラム G と射 $g: G \to E$ に対し $g = i_n \cdot g_n$ なる唯一つの射 $g_n: G \to E(n, \infty)$ が存在する。

[証明] (1.1) と (1.2) により 対 $(E(-\infty, n], j_n)$ と 対 $(E(n, \infty), i_n)$ が存在する。そこで次の完全列

$$\{\Sigma E(n,\infty), F\} \to \{E(-\infty, n], F\} \xrightarrow{j_n^*} \{E, F\} \to \{E(n,\infty), F\}$$

$$\{G, \Sigma^{-1}E(-\infty, n]\} \to \{G, E(n,\infty)\} \xrightarrow{i_{n*}} \{G, E\} \to \{G, E(-\infty, n]\}$$

を考えると、補題1-2 i) より j_n^* と i_{n*} は共に同型になる。
従って f, g に対し f_n, g_n がそれぞれ唯一つ定まる。□

<u>補題1.4</u> $m < n$ とすると、ホモトピー同値射

$$(E(m,\infty))(-\infty, n] \to (E(-\infty, n])(m, \infty)$$

が存在して、次の図式は可換になる:

$$\begin{tikzcd}
 & E(m,\infty) \arrow[dl] \arrow[r] & (E(m,\infty))(-\infty, n] \arrow[d] \\
E \arrow[r] & E(-\infty, n] & (E(-\infty, n])(m,\infty) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

上の補題の結果、$m < n$ に対し

$$E(m, n] = (E(m,\infty))(-\infty, n] = (E(-\infty, n])(m, \infty)$$

と定義してよい。特に $E(n-1, n] = E[n]$ と略す。

1.2. $\varphi: E \wedge F \to G$ を CWスペクトラムのペアリングとする。 $E[0,\infty) \wedge F(n,\infty)$ は n 連結だから、定理1.3 ii) と補題1.2 i) を用いると次の図式

$$\begin{tikzcd}
E[0,\infty) \wedge F(n,\infty) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(n,\infty)"'] & E[0,\infty) \wedge F \arrow[r] \arrow[d] & E[0,\infty) \wedge F(-\infty,n] \arrow[dd, "\varphi(-\infty,n]"] \\
 & E \wedge F \arrow[d] & \\
G(n,\infty) \arrow[r] & G \arrow[r] & G(-\infty,n]
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

を可換にする射 $\varphi(n,\infty)$ と $\varphi(-\infty,n]$ が唯一つ存在する。
更に (1.3) と補題1.2 i) を用いると次の図式

$$\begin{tikzcd}
E[0,\infty) \wedge F(n,\infty) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(n,\infty)"'] & E[0,\infty) \wedge F[n] \arrow[r] \arrow[d, "\varphi[n]"] & E[0] \wedge F[n] \arrow[dl, "\bar{\varphi}[n]"] \\
G(n,\infty) \arrow[r] & G[n] &
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

を可換にする射 $\varphi[n]$ と $\bar{\varphi}[n]$ が唯一つ定まる。

命題1.5 i) E を（結合性又は可換性をみたす）1をもつ環CWスペクトラムとする。このとき

a) $E[0,\infty)$, $E[0]$ は共に同様なCWスペクトラムで、 $i: E[0,\infty) \to E$ と $j': E[0,\infty) \to E[0]$ は1をもつ環としての射になる。

b) $E(-\infty,0]$ は（結合性をみたす） $E[0,\infty)$ 加群CWスペクトラムで、 $j: E \to E(-\infty,0]$ と $i': E[0] \to E(-\infty,0]$ は $E[0,\infty)$ 加群としての射になる。

ii) $f: E \to F$ を1をもつ環CWスペクトラムの射とする。

そのとき, $f[0,\infty): E[0,\infty) \to F[0,\infty)$ と $f[0]: E[0] \to F[0]$ は共にその様な射になる。

iii) 次の図式は可換になる:

$$\begin{tikzcd}
 & E[0] \arrow[dr] & \\
E[0,\infty) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[d, bend left] & E(-\infty,0] \arrow[d] \\
F[0,\infty) \arrow[r] \arrow[dr] & F \arrow[r] & F(-\infty,0] \\
 & F[0] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

K, MU をそれぞれ BU スペクトラム, 複素 Thom スペクトラムとし, $\mu_c: MU \to K$ を Thom 写像とする。K と MU は共に結合性と可換性をみたす 1 をもつ環 CW スペクトラムで, μ_c は 1 をもつ環としての射になる。連結 BU スペクトラム $K[0,\infty)$ と余連結 BU スペクトラム $K(-\infty,0]$ をそれぞれ k, $\bar{k}$ で表わし, 命題 1.5 を適用すると

<u>定理 1.6</u> i) k は結合性と可換性をみたす 1 をもつ環 CW スペクトラムで, $\bar{k}$ は結合性をみたす k 加群 CW スペクトラムになる。

ii) Thom 写像 μ_c によって射 $\xi: MU \to k$ が唯一つ定まり, 次の図式が可換になる:

$$\begin{tikzcd}
 & k \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\eta"] & \\
MU \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "\mu_c"'] \arrow[d, "\mu"'] & K \arrow[d, "\bar{\lambda}"] & H \arrow[dl, "\bar{\eta}"] \\
H \arrow[r, "\bar{\eta}"'] & \bar{k} &
\end{tikzcd}$$

しかも μ_c, ξ, λ, μ, η は1をもつ環としての射で、$\bar{\lambda}$, $\bar{\eta}$ は k 加群としての射である。

なお、1をもつ環 k と k 加群 $\bar{k}$ との関係として

命題 1.7 次の列は完全列である:

$$0 \longrightarrow k_*(X) \otimes_{\pi_*(k)} \pi_*(\bar{k}) \longrightarrow \bar{k}_*(X) \to \mathrm{Tor}_1^{\pi_*(k)}(k_*(X), \pi_*(\bar{k})) \to 0.$$

2節 普遍係数列

2.1 CWスペクトラム E とアーベル群 I に対し、$\mathrm{Hom}(E_*(\ ), I)$ はCWスペクトラム上のコホモロジー理論になる。従って、Brownの表現可能定理によりCWスペクトラム $\hat{E}(I)$ が唯一つ存在して、同型 $\tau_I : \hat{E}(I)^*(X) \cong \mathrm{Hom}(E_*(X), I)$ が得られる。今 $0 \to A \to I \xrightarrow{\varphi} J \to 0$ をアーベル群 A の単射的分解とすると、準同型 φ より射 $\hat{E}(\varphi) : \hat{E}(I) \to \hat{E}(J)$ が唯一つ定まる。その写像錐を $\Sigma \hat{E}(A)$ とおくと、完全列

(2.1) $\quad 0 \to \mathrm{Ext}(E_{*-1}(X), A) \to \hat{E}(A)^*(X) \xrightarrow{\tau_A} \mathrm{Hom}(E_*(X), A) \to 0$

が成り立ち、しかも $\hat{E}(A)$ は A の単射的分解によらないで一意に定まる。特に

(2.2) $\quad \hat{H}(A) = HA, \quad \hat{K}(A) = KA$ [4].

補題 2.1 $\hat{E}(A) = F(E, \hat{S}(A))$ 射CWスペクトラム.

[証明] I を単射的アーベル群とすると、同型

$\hat{E}(I)^*(X) \cong \mathrm{Hom}(E_*(X), I) \xleftarrow{\cong} \hat{S}(I)^*(X \wedge E) \xleftarrow{\cong} F(E, \hat{S}(I))^*(X)$

が得られるので，ホモトピー同値射 $h_I : \hat{E}(I) \to F(E, \hat{S}(I))$ が存在する。従って A の単射的分解 $0 \to A \to I \to J \to 0$ に対し，次の図式

$$
\begin{array}{ccccccc}
\hat{E}(A) & \to & \hat{E}(I) & \to & \hat{E}(J) & \to & \Sigma\hat{E}(A) \\
{\scriptstyle h_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_I} & & \downarrow{\scriptstyle h_J} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma h_A} \\
F(E, \hat{S}(A)) & \to & F(E, \hat{S}(I)) & \to & F(E, \hat{S}(J)) & \to & F(E, \Sigma\hat{S}(J))
\end{array}
$$

を可換にするホモトピー同値射 $h_A : \hat{E}(A) \to F(E, \hat{S}(A))$ が存在する。□

$e_E(A) : \hat{E}(A) \wedge E \to \hat{S}(A)$ を評価射とするとき，射 $\varepsilon_E(A) : E \to F(\hat{E}(A), \hat{S}(A))$ を $e_E(A) = e_{\hat{E}(A)}(A)_*(1_{\hat{E}(A)} \wedge \varepsilon_E(A))$ によって定義する。以後，整数環 Z に対し $\hat{E}(Z)$, $e_E(Z)$, $\varepsilon_E(Z)$ をそれぞれ $\hat{E}$, e_E, ε_E と略す。

<u>定理2.2</u> i) 関手 $F(\ , \hat{S}(A)) : \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_R$ は反変完全関手である。

ii) 全ての k に対し $\pi_k(E)$ は有限生成と仮定する。そのとき

a) $\varepsilon_E : E \longrightarrow F(\hat{E}, \hat{S})$ はホモトピー同値射であり，

b) $F(\ , \hat{S}) : \{X, E\} \longrightarrow \{\hat{E}, \hat{X}\}$ は同型になる。

準同型 $\kappa_A : \hat{E}(A)^*(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_*(X), \pi_0(\hat{S}(A)))$ を $\kappa_A(f) = f_*$ によって定義すると

<u>命題2.3</u> A が有限生成アーベル群ならば，次の列

$0 \to \mathrm{Ext}(E_{*-1}(X), \pi_0(\hat{S}(A))) \to \hat{E}(A)^*(X) \xrightarrow{\kappa_A} \mathrm{Hom}(E_*(X), \pi_0(\hat{S}(A))) \to 0$

は完全列になる。

[証明] I が単射的アーベル群として有限生成のとき，次の三角形

$$\begin{array}{ccc} \hat{E}(I)^*(X) & \xrightarrow{\kappa_I} & \mathrm{Hom}(E_*(X),\ \pi_0(\hat{S}(I))) \\ & \searrow^{\tau_I} & \downarrow \rho_I \\ & & \mathrm{Hom}(E_*(X),\ I) \end{array}$$

を可換にする自然な同型 ρ_I が存在することを示せば十分である。 今 $\alpha_I = \tau_I(1_{\hat{S}(I)}) \in \mathrm{Hom}(\pi_0(\hat{S}(I)), I)$ とおくと，上の同型 τ_I は $\tau_I = \alpha_{I*}\cdot\kappa_I$ を満たす。 明らかに $\pi_0(\hat{S}(I)) \cong I$ だから，その同型を T と表わすと $\alpha_I \cdot S_{I*} = T$ となる射 $S_I: \hat{S}(I) \to \hat{S}(I)$ が存在する。 しかも I に対する仮定の下 α_I は同型となるので，同型 ρ_I として α_{I*} を取ればよい。□

1.2. $\varphi: E \wedge F \to G$ をCWスペクトラムのペアリングとすると，次の図式

$$(2.3)\qquad \begin{array}{ccc} \hat{G}(A)\wedge E\wedge F & \xrightarrow{1\wedge\varphi} & \hat{G}(A)\wedge G \\ \bar{\varphi}(A)\wedge 1 \downarrow & & \downarrow e_G(A) \\ \hat{F}(A)\wedge F & \xrightarrow[e_F(A)]{} & \hat{S}(A) \end{array}$$

を可換にする射 $\bar{\varphi}(A): \hat{G}(A)\wedge E \to \hat{F}(A)$ が唯一つ定まる。 更に，$e_{E\wedge F}(A) = e_F(A)_*(e_{E,F}(A)\wedge 1_F)$ によって与えられる評価射 $e_{E,F}(A): \widehat{E\wedge F}(A)\wedge E \to \hat{F}(A)$ を用いると

(2,4) $\bar{\varphi}(A) : \hat{G}(A)\wedge E \xrightarrow{\hat{\varphi}(A)\wedge 1} \widehat{E\wedge F}(A)\wedge E \xrightarrow{e_{E,F(A)}} \hat{F}(A)$.

定理 2,2 ii) と (2,4) により

<u>命題 2,4</u>　E は 1 をもつ環CWスペクトラムとする。

i) F が(結合性をみたす)左 E 加群 CWスペクトラムならば、$\hat{F}(A)$ は(結合性をみたす)右 E 加群 CWスペクトラムになる。

ii) $f : F \to G$ が左 E 加群としての射ならば、$\hat{f}(A) : \hat{G}(A) \to \hat{F}(A)$ は右 E 加群としての射になる。

ペアリング $\varphi : F\wedge E \to G$ により $E^*(Y)\otimes Hom(G_*(Y), A) \to Hom(F_*(X\wedge Y), A)$ が導かれ、$\bar{\varphi}(A) : E\wedge \hat{G}(A) \to \hat{F}(A)$ により $E^*(X)\otimes \hat{G}(A)^*(Y) \to \hat{F}(A)^*(X\wedge Y)$ が導かれる。

<u>定理 2,5</u>　E は 1 をもつ環CWスペクトラム、F は右 E 加群CWスペクトラムとし、A は有限生成アーベル群とする。そのとき $E^*(\ )$ 加群としての完全列

$$0 \to Ext(F_{*-1}(X), A) \to \hat{F}(A)^*(X) \xrightarrow{\kappa_A} Hom(F_*(X), A) \to 0$$

が存在する。

[証明] I を単射的アーベル群とすると、(2,3) により

$$\begin{array}{ccc} E^*(X)\otimes \hat{F}(I)^*(Y) & \xrightarrow{1\otimes\kappa_I} & E^*(X)\otimes Hom(F_*(Y), \pi_0(\hat{S}(I))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{F}(I)^*(X\wedge Y) & \xrightarrow[\kappa_I]{} & Hom(F_*(X\wedge Y), \pi_0(\hat{S}(I))) \end{array}$$

が可換になる。従って命題 2,3 の完全列は $E^*(\ )$ 加群としてのそれになる。』

<u>命題 2,6</u>　ホモトピー同値射 $KA \to \hat{S}(A)$ は次の図式

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & KA \arrow[r, "\bar{\lambda}"] \arrow[d] & \bar{k}A \arrow[d] \\
\hat{k}(A) \arrow[r, "\hat{\lambda}(A)"'] & \hat{K}(A) \arrow[r, "\hat{\bar{\lambda}}(A)"'] & \hat{\bar{k}}(A)
\end{tikzcd}$$

を可換にするホモトピー同値射 $kA \longrightarrow \hat{k}(A)$, $\bar{k}A \to \hat{\bar{k}}(A)$ を導く。

定理1.6 iii), 2.2 i) と命題2.6により次の可換な図式

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\bar{\lambda}"] & & \hat{K} \arrow[dr, "\hat{\bar{\lambda}}"'] \arrow[drr, "\hat{\mu}_c"] & & \\
MU \arrow[r, "\xi"] \arrow[urr, "\mu_c"] \arrow[drr, "\mu"'] & k \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\eta"] & & \bar{k} \arrow[rr, "\simeq"] & & \hat{\bar{k}} \arrow[r, "\hat{\xi}"] & \hat{MU} \\
 & & H \arrow[ur, "\bar{\eta}"] \arrow[rr, "\simeq"] & & \hat{H} \arrow[ur, "\hat{\bar{\eta}}"] \arrow[urr, "\hat{\mu}"'] & &
\end{tikzcd}$$

が得られるので、命題2.4を用いて定理1.6 iii) の図式を拡張すると

<u>定理2.7</u> 次の可換な図式

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dr, "\bar{\lambda}"] \arrow[drr, "\hat{\mu}_c"] & & \\
MU \arrow[r, "\xi"] \arrow[urr, "\mu_c"] \arrow[drr, "\mu"'] & k \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\eta"] & & \bar{k} \arrow[r, "\hat{\xi}"] & \hat{MU} \\
 & & H \arrow[ur, "\bar{\eta}"] \arrow[urr, "\hat{\mu}"'] & &
\end{tikzcd}$$

において、i) μ_c, ξ, λ, μ, η は1をもつ環としての射で、ii) $\bar{\lambda}$, $\bar{\eta}$ は k 加群としての射、又 iii) $\hat{\mu}_c$, $\hat{\xi}$, $\hat{\mu}$ は MU 加群としての射である。

$\mu : MU \longrightarrow H$ は Baas [2] によれば

(2.5) $\qquad MU \to \cdots \to MU\langle n\rangle \to \cdots \to H$

と分解され、かつ $MU\langle n\rangle_*(\ )$ は結合性をみたす $MU_*(\ )$ 加群になる。 従って $\varphi_n : MU_*(X) \otimes MU\langle n\rangle_*(Y) \to MU\langle n\rangle_*(X \wedge Y)$

を導くペアリング $\varphi\langle n\rangle : MU \wedge MU\langle n\rangle \to MU\langle n\rangle$ が存在するが，$MU\langle n\rangle^0(MU \wedge MU\langle n\rangle)$ のハウスドルフ性によりペアリング $\varphi\langle n\rangle$ は唯一つ定まる。 命題2.4を用いると

定理 2.8 i) $MU\langle n\rangle$, $\widehat{MU\langle n\rangle}(A)$ は共に結合性をみたす MU 加群 CW スペクトラムである。

ii) $MU \to \cdots \to MU\langle n\rangle \to \cdots \to H \to \cdots \to \widehat{MU\langle n\rangle} \to \cdots \to \widehat{MU}$ は MU 加群としての射からなる列である。

定理2.5を適用すると

系 2.9 A が有限生成アーベル群ならば，$K_A : \pi_*(\widehat{MU\langle n\rangle}(A)) \to \mathrm{Hom}(\pi_{-*}(MU\langle n\rangle), A)$ は $\pi_*(MU)$ 加群として同型になる。

参考文献

[1] S. Araki: 一般コホモロジー，紀伊国屋書店（予刊）

[2] N. A. Baas: On bordism theory of manifold with singularities, Aarhus Univ. (1969/70).

[3] A. Dold: On general cohomology, Aarhus Univ. (1968).

[4] Z. Yosimura: Universal coefficient sequences for cohomology theories of CW-spectra, Osaka J. Math.（投稿中）